Teorema da aditividade da normal (T.A.N.)

- *Teor*: Se $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são variáveis aleatórias ***independentes*** e a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes, então:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

Resumindo: Este teorema diz que qualquer ***combinação linear*** de *v. a.* ***normais e independentes*** tem distribuição normal.

No caso particular de $\mu = \mu_i$, $\sigma = \sigma_i$ e $a_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, teremos:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}\left(n\mu , n\sigma^2 \right)$$

Teorema da aditividade da normal (T.A.N.)

- *Exercício*: Sejam $X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2{}^2)$ *v. a.* independentes. De acordo com a aditividade da normal, quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

  $a)\ X+Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$

  $b)\ X-Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2-\sigma_2^2\right)$

  $c)\ X-Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$

  $d)\ P\left(X+Y \le 2\right) = \Phi\left(\dfrac{2-\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$

- *Exercício*: Sejam $X \sim \mathrm{N}(5,4)$, $Y \sim \mathrm{N}(6,9)$ e $W \sim \mathrm{N}(7,16)$ *v. a.* independentes. Segundo a aditividade da normal, quais das seguintes afirmações estão correctas?

  $a)\ X+Y-W \sim \mathrm{N}\left(5+6-7, 2+3+4\right)$

  $b)\ X+Y-W \sim \mathrm{N}\left(5+6-7, 4+9+16\right)$

  $c)\ X-2Y+3W \sim \mathrm{N}\left(5-2\times 6+3\times 7, 4-2\times 9+3\times 16\right)$

  $d)\ X-2Y+3W \sim \mathrm{N}\left(5-2\times 6+3\times 7, 4+4\times 9+9\times 16\right)$

Exercício

O peso dos habitantes de certa localidade segue uma distribuição normal, de média 60 kg e desvio-padrão 10 kg. Nove habitantes entraram num elevador cuja carga máxima é de 600 kg. Calcule a probabilidade da carga máxima ter sido excedida.

X_i :"Peso do i-ésimo habitante, em kg" $\quad X_i \sim \mathrm{N}(60{,}100)$

Y :"Peso total de 9 habitantes, em kg"

$$Y = \sum_{i=1}^{9} X_i \sim \mathrm{N}(9\times 60{,}9\times 100) = \mathrm{N}(540{,}900)$$

TAN

$$P(Y > 600) = 1 - P(Y \leq 600) = 0{,}0228$$

$1 - pnorm(600, 540, 30)$

Teorema do limite central (T.L.C.)

- *Teor*: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias ***independentes***, com médias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, respectivamente. Então, ***sob certas condições*** (e.g., variâncias finitas), para n suficientemente grande ($\boldsymbol{n \geq 30}$) e quaisquer que sejam as distribuições de X_i , verifica-se que:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

segue ***aproximadamente*** uma distribuição

$$\mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i , \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \right)$$

Resumindo: Este teorema diz que, sob certas condições, a ***soma*** de um ***grande nº*** de *v. a.* ***independentes*** tem distribuição ***aproximadamente*** normal.

Teorema do limite central (T.L.C.)

- *Exercício*: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_{40}$ *v. a.* independentes com a mesma média, $\mu = 2$, e o mesmo desvio padrão, $\sigma = 3$. Então, de acordo com o T.L.C., quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$$a)\ \sum_{i=1}^{40} X_i \sim N(80{,}120)$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{40} X_i \sim N(80{,}360)$$

$$c)\ Y = \sum_{i=1}^{40} X_i \quad \Rightarrow \quad P(Y > 80) = 0.5$$

$$d)\ Y = \sum_{i=1}^{40} X_i \quad \Rightarrow \quad P(Y < 20) = \Phi\left(\frac{20-80}{\sqrt{360}}\right)$$

Exercício

O tempo de execução de uma dada tarefa é uma *v.a.* com média e desvio padrão de 5 segundos. Qual é a probabilidade do tempo total de execução de 30 destas tarefas ser superior a 145 segundos?

X_i :"Tempo de execução da *i*-ésima tarefa, em segundos"

$$E(X_i) = 5\ s \qquad ; \qquad V(X_i) = 5^2\ s^2$$

Y :"Tempo total de execução de 30 tarefas, em segundos"

$$Y = \sum_{i=1}^{30} X_i \underset{\text{TLC}}{\sim} \mathrm{N}(30 \times 5, 30 \times 5^2) = \mathrm{N}(150, 750)$$

$$P(Y > 145) = 1 - P(Y \le 145) = 0{,}5724$$

$1 - pnorm\left(145, 150, \sqrt{750}\right)$