

Teorema da aditividade da normal (T.A.N.)

- **Teor:** Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, são variáveis aleatórias *independentes* e a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são constantes, então:

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Resumindo: Este teorema diz que qualquer *combinação linear* de v. a. *normais e independentes* tem distribuição normal.

No caso particular de $\mu = \mu_i$, $\sigma = \sigma_i$ e $a_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, teremos:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Teorema da aditividade da normal (T.A.N.)

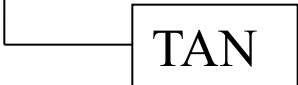
- *Exercício:* Sejam $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ v. a. independentes. De acordo com a aditividade da normal, quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
 - a) $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
 - b) $X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 - \sigma_2^2)$
 - c) $X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
 - d) $P(X + Y \leq 2) = \Phi\left(\frac{2 - \mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$
- *Exercício:* Sejam $X \sim N(5, 4)$, $Y \sim N(6, 9)$ e $W \sim N(7, 16)$ v. a. independentes. Segundo a aditividade da normal, quais das seguintes afirmações estão correctas?
 - a) $X + Y - W \sim N(5 + 6 - 7, 2 + 3 + 4)$
 - b) $X + Y - W \sim N(5 + 6 - 7, 4 + 9 + 16)$
 - c) $X - 2Y + 3W \sim N(5 - 2 \times 6 + 3 \times 7, 4 - 2 \times 9 + 3 \times 16)$
 - d) $X - 2Y + 3W \sim N(5 - 2 \times 6 + 3 \times 7, 4 + 4 \times 9 + 9 \times 16)$


Exercício

O peso dos habitantes de certa localidade segue uma distribuição normal, de média 60 kg e desvio-padrão 10 kg. Nove habitantes entraram num elevador cuja carga máxima é de 600 kg. Calcule a probabilidade da carga máxima ter sido excedida.

X_i : "Peso do i -ésimo habitante, em kg" $X_i \sim N(60, 100)$

Y : "Peso total de 9 habitantes, em kg"

$$Y = \sum_{i=1}^9 X_i \sim N(9 \times 60, 9 \times 100) = N(540, 900)$$


$$P(Y > 600) = 1 - P(Y \leq 600) = 0,0228$$


$1 - \text{pnorm}(600, 540, 30)$

Teorema do limite central (T.L.C.)

- **Teor:** Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias *independentes*, com médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, respectivamente. Então, *sob certas condições* (e.g., variâncias finitas), para n suficientemente grande ($n \geq 30$) e quaisquer que sejam as distribuições de X_i , verifica-se que:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

segue *aproximadamente* uma distribuição

$$N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Resumindo: Este teorema diz que, sob certas condições, a *soma* de um *grande* n° de v. a. *independentes* tem distribuição *aproximadamente* normal.

Teorema do limite central (T.L.C.)

- Exercício:* Sejam X_1, X_2, \dots, X_{40} v. a. independentes com a mesma média, $\mu = 2$, e o mesmo desvio padrão, $\sigma = 3$. Então, de acordo com o T.L.C., quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$$a) \sum_{i=1}^{40} X_i \sim N(80, 120)$$

$$b) \sum_{i=1}^{40} X_i \sim N(80, 360)$$

$$c) Y = \sum_{i=1}^{40} X_i \Rightarrow P(Y > 80) = 0.5$$

$$d) Y = \sum_{i=1}^{40} X_i \Rightarrow P(Y < 20) = \Phi\left(\frac{20 - 80}{\sqrt{360}}\right)$$

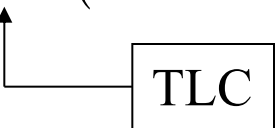
Exercício

O tempo de execução de uma dada tarefa é uma *v.a.* com média e desvio padrão de 5 segundos. Qual é a probabilidade do tempo total de execução de 30 destas tarefas ser superior a 145 segundos?

X_i : "Tempo de execução da i -ésima tarefa, em segundos"

$$E(X_i) = 5 \text{ s} \quad ; \quad V(X_i) = 5^2 \text{ s}^2$$

Y : "Tempo total de execução de 30 tarefas, em segundos"

$$Y = \sum_{i=1}^{30} X_i \sim N(30 \times 5, 30 \times 5^2) = N(150, 750)$$


$$P(Y > 145) = 1 - P(Y \leq 145) = 0,5724$$


$$1 - \text{pnorm}(145, 150, \sqrt{750})$$